PT Programme de Colles
Semaine 16

Équations différentielles scalaires d'ordre 1 et 2

- Rappels de première année sur les équations différentielles scalaires d'ordre 1 et les équations différentielles scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.
- Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Équation différentielle homogène associée.
- Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy
- Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.
- Principe de superposition des solutions. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Exemples de recherches de solutions développables en série entière.
- Résolution dans le cas où on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.

Intégrales à paramètre

- Fonction définie par une intégrale
- Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
  - pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
  - pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
  - il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

  alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.
- Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
  - pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
  - pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
  - pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A ;
  - il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

  alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

- <u>Remarque :</u> le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.